

Wyrażenia algebraiczne

Wyrażenia algebraiczne

Wyrażenie algebraiczne
Wyrażenie składające się z liczb i zmiennych liczbowych połączonych znakami działań (mogą w nim również występować nawiasy).

$\frac{2ab - \frac{1}{2}cd}{h}$

$a+b$
SUMA LICZB
 $a + b$

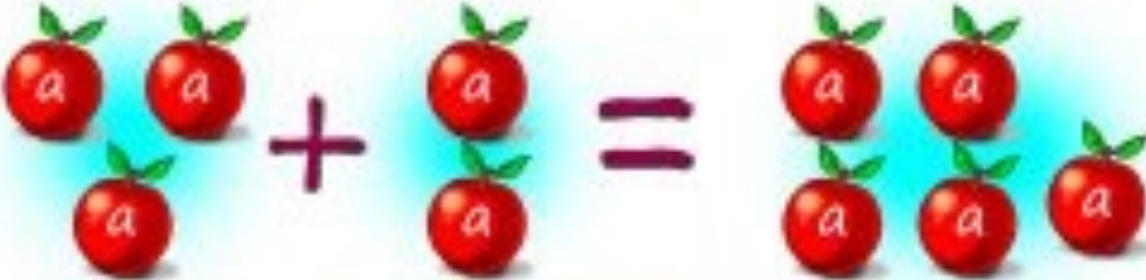
$a-b$
RÓŻNICA LICZB
 $a - b$

ab
ILOZYN LICZB
 $a \cdot b$

$\frac{a}{b}$
ILORAZ LICZB
 $a : b$

REDUKCJA WYRAZÓW PODOBNYCH

$3a + 2a = 5a$



Redukując wyrazy podobne dodajemy lub odejmujemy ich współczynniki liczbowe.

$7a + 5b + 2a - 3b = 9a + 2b$



Wyrażenia algebraiczne, jednomiany, sumy algebraiczne

Przypomnijmy, że wyrażeniami algebraicznymi nazywamy takie wyrażenia, w których obok liczb i znaków działań występują litery.

Przykłady jednomianów:

$$\begin{array}{ccc} -13 & 4n & c \\ -2xy^2 & 7x^5y^3t & \end{array}$$

Wszystkie wyrażenia algebraiczne zbudowane są z **jednomianów**, czyli wyrażeń, które są pojedynczymi liczbami, pojedynczymi literami lub iloczynami liczb i liter.

Przykłady sum algebraicznych:

$$-3a^3 + 12a^2 - 5a + 1$$

$$2x^2 - xy + 2xz$$

$$2c - d$$

Wyrażenie algebraiczne, które powstaje przez dodawanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**. Jednomiany, które dodajemy, nazywamy **wyrazami sumy**.

Uwaga. W sumie algebraicznej

$$-3a^3 + 12a^2 - 5a + 1$$

wyrazami są jednomiany:

$$-3a^3, 12a^2, -5a, 1$$

Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

Przykłady

Przekształć iloczyny na sumy algebraiczne:

$$-4x \cdot (2x - 3) = -8x^2 + 12x$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ -4x \cdot 2x & -4x \cdot (-3) \end{array}$

Mnożymy jednomian przez
każdy składnik sumy.

$$20x \cdot \frac{3x-1}{4} = \frac{20x(3x-1)}{4} = 5x(3x-1) = 15x^2 - 5x$$

Dzielenie sum algebraicznych przez liczbę

Przykłady

Przekształć ilorazy na sumy algebraiczne:

$$(12x^2 + 3x + 6) : 6 = 2x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$12x^2 : 6$ $3x : 6$ $6 : 6$

Dzielimy każdy składnik sumy przez liczbę.

$$\frac{45a^2 + 5ab - 3}{15} = \frac{45a^2}{15} + \frac{5ab}{15} - \frac{3}{15} = 3a^2 + \frac{ab}{3} - \frac{1}{5}$$

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

Przykłady

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

$$5x^2 - 15xy = 5x(x - 3y)$$

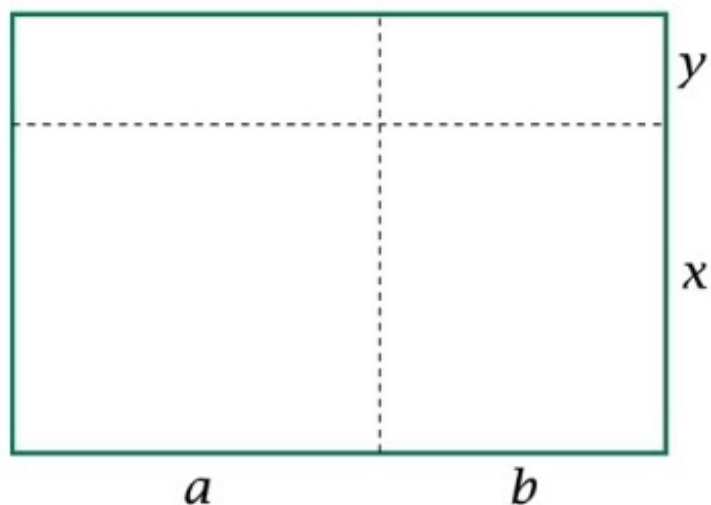
$$\begin{array}{cc} \nearrow & \nearrow \\ 5x \cdot x & 5x \cdot (-3y) \end{array}$$

$$9a^3 + 15a^2b^2 - 12a^2 = 3a^2(3a + 5b^2 - 4)$$

Sprawdzenie:

$$5x(x - 3y) = 5x^2 - 15xy$$

Mnożenie sum algebraicznych



Na rysunku obok przedstawiony jest prostokąt o bokach $a + b$ i $x + y$. Pole tego prostokąta jest równe $(a + b)(x + y)$.

Zauważ, że pole tego prostokąta jest sumą pól czterech mniejszych prostokątów, czyli można je też zapisać w postaci $ax + ay + bx + by$. Otrzymujemy więc równość:

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$$

A diagram illustrating the distributive property of multiplication over addition using shapes. On the left, the expression $(\text{yellow circle} + \text{yellow square}) \cdot (\text{green triangle} + \text{green diamond})$ is shown. Blue curved arrows connect the yellow circle to both the green triangle and the green diamond. Red curved arrows connect the yellow square to both the green triangle and the green diamond. This is followed by an equals sign and the expanded sum: $\text{yellow circle} \cdot \text{green triangle} + \text{yellow circle} \cdot \text{green diamond} + \text{yellow square} \cdot \text{green triangle} + \text{yellow square} \cdot \text{green diamond}$.

Przykłady

$$(2a + 7)(x + 3) = 2ax + 6a + 7x + 21$$

$2a \cdot x$ $2a \cdot 3$ $7 \cdot x$ $7 \cdot 3$

Mnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$$(a + 5)(x - 3y + 1) = ax - 3ay + a + 5x - 15y + 5$$

$a \cdot x$ $a \cdot (-3y)$ $a \cdot 1$ $5 \cdot x$ $5 \cdot (-3y)$ $5 \cdot 1$

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy kwadratowi pierwszego wyrażenia plus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie plus kwadrat drugiego wyrażenia.

$$(\text{orange circle} + \text{green square})^2 = \text{orange circle}^2 + 2 \cdot \text{orange circle} \cdot \text{green square} + \text{green square}^2$$

Kwadrat różnicy:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy kwadratowi pierwszego wyrażenia minus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie plus kwadrat drugiego wyrażenia.

$$(\text{orange circle} - \text{green square})^2 = \text{orange circle}^2 - 2 \cdot \text{orange circle} \cdot \text{green square} + \text{green square}^2$$

Iloczyn sumy przez różnicę:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

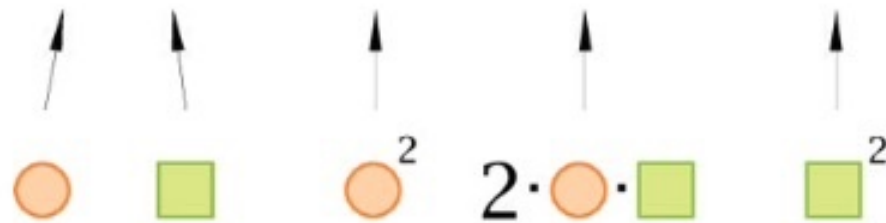
Iloczyn sumy przez różnicę tych samych wyrażeń jest równy różnicy kwadratów tych wyrażeń.

$$(\text{orange circle} + \text{green square})(\text{orange circle} - \text{green square}) = \text{orange circle}^2 - \text{green square}^2$$

Przykłady

Przykłady

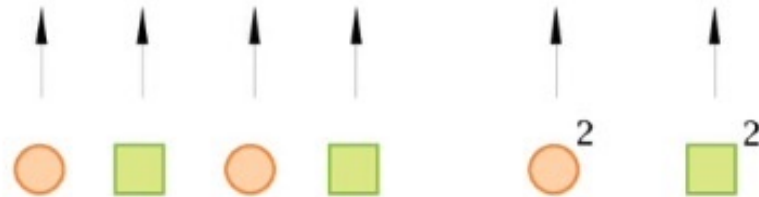
$$(5 + 3a)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3a + (3a)^2 = 25 + 30a + 9a^2$$



$$(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$$

Przykłady

$$(3x + y^2)(3x - y^2) = (3x)^2 - (y^2)^2 = 9x^2 - y^4$$



$$(5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3}) = 5^2 - (2\sqrt{3})^2 = 25 - 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 25 - 4 \cdot 3 = 13$$